

Sezioni Coniche

Francesco Canfora

2 luglio 2026

Indice

1	Introduzione alle Coniche	2
2	La Circonferenza	2
2.1	Equazione Canonica ed Equazione Generale	2
2.2	Formule degli Elementi Caratteristici	2
3	La Parabola	3
3.1	Parabola con asse di simmetria verticale	3
3.2	Parabola con asse di simmetria orizzontale	3
4	L'Ellisse	4
4.1	Equazione Canonica	4
4.2	Fuochi e Relazione Fondamentale	4
4.3	Eccentricità	5
5	L'Iperbole	5
5.1	Iperbole con Fuochi sull'asse x	5
5.2	Iperbole con Fuochi sull'asse y	5
5.3	Eccentricità	6
6	Classificazione Algebrica delle Coniche	6

1 Introduzione alle Coniche

Le sezioni coniche sono le curve geometriche ottenute dall'intersezione di un piano con un cono a doppia falda. A seconda dell'inclinazione del piano rispetto all'asse del cono, si ottengono quattro figure distinte: **circonferenza, ellisse, parabola e iperbole**.

Dal punto di vista algebrico, tutte le coniche possono essere rappresentate nello spazio cartesiano da un'equazione generale di secondo grado in due variabili della forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

Se il termine misto $B = 0$, la conica ha gli assi principali paralleli o coincidenti con gli assi cartesiani di riferimento.

2 La Circonferenza

La circonferenza è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto **centro** C . La distanza fissa prende il nome di **raggio** r .

2.1 Equazione Canonica ed Equazione Generale

Se il centro si trova nell'origine degli assi cartesiani $O(0, 0)$, l'equazione assume la forma canonica:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (2)$$

Nel caso in cui il centro sia situato in un punto generico $C(\alpha, \beta)$, l'equazione diventa:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \quad (3)$$

Sviluppando i quadrati si ottiene l'equazione generale della circonferenza:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad (4)$$

2.2 Formule degli Elementi Caratteristici

Partendo dall'equazione generale, è possibile ricavare le coordinate del centro e la misura del raggio tramite le seguenti relazioni:

- **Centro:** $C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$
- **Raggio:** $r = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c}$

La condizione di esistenza reale della curva impone che l'argomento sotto il segno di radice sia strettamente non negativo, ovvero $\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c \geq 0$.

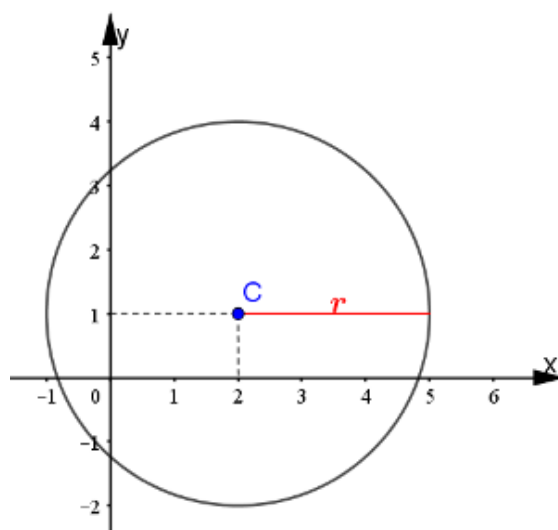


Figura 1: Immagine circonferenza

3 La Parabola

La parabola è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto **fuoco** F e da una retta data detta **direttrice** d . Ponendo il discriminante algebrico $\Delta = b^2 - 4ac$, si distinguono due casi principali in base all'orientamento dell'asse di simmetria.

3.1 Parabola con asse di simmetria verticale

L'equazione caratteristica è della forma:

$$y = ax^2 + bx + c \quad (5)$$

Le formule associate sono:

- **Vertice:** $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$
- **Fuoco:** $F\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right)$
- **Asse di simmetria:** $x = -\frac{b}{2a}$
- **Direttrice:** $y = -\frac{1+\Delta}{4a}$

3.2 Parabola con asse di simmetria orizzontale

L'equazione caratteristica si trasforma in:

$$x = ay^2 + by + c \quad (6)$$

Le relative formule geometriche sono invertite rispetto al caso precedente:

- **Vertice:** $V \left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a} \right)$
- **Fuoco:** $F \left(\frac{1-\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a} \right)$
- **Asse di simmetria:** $y = -\frac{b}{2a}$
- **Direttrice:** $x = -\frac{1+\Delta}{4a}$

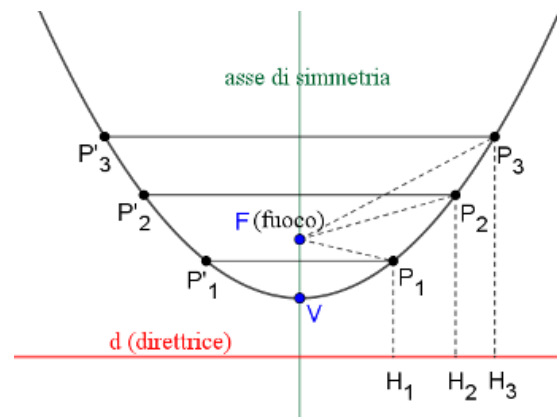


Figura 2: Immagine parabola con asse verticale

4 L'Ellisse

L'ellisse è il luogo geometrico dei punti del piano per i quali rimane costante la somma delle distanze da due punti fissi detti **fuochi** F_1 e F_2 .

4.1 Equazione Canonica

Assumendo il centro della conica coincidente con l'origine degli assi cartesiani $O(0, 0)$, l'equazione canonica si scrive come:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (7)$$

In cui a rappresenta la misura del semiasse orizzontale e b la misura del semiasse verticale.

4.2 Fuochi e Relazione Fondamentale

La disposizione dei fuochi e la relazione metrica dipendono dai valori dei semiassi:

- **Fuochi sull'asse x ($a > b$):** La relazione fondamentale è $a^2 = b^2 + c^2$. La semidistanza focale vale $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ ed i fuochi si trovano in $F_{1,2}(\pm c, 0)$.
- **Fuochi sull'asse y ($b > a$):** La relazione fondamentale diventa $b^2 = a^2 + c^2$. La semidistanza focale vale $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ ed i fuochi sono espressi da $F_{1,2}(0, \pm c)$.

4.3 Eccentricità

L'eccentricità è un parametro adimensionale che misura lo schiacciamento dell'ellisse ($0 \leq e < 1$):

$$e = \frac{c}{\text{semiasse maggiore}} \quad (8)$$

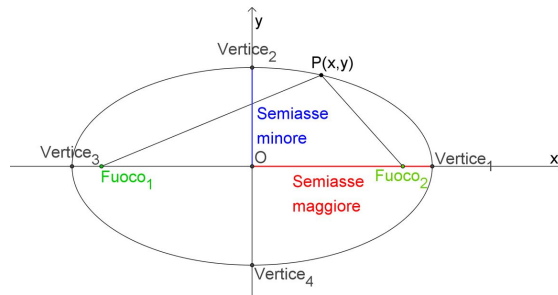


Figura 3: Immagine ellisse

5 L'Iperbole

L'iperbole è il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la differenza in valore assoluto delle distanze da due punti fissi detti **fuochi** F_1 e F_2 .

5.1 Iperbole con Fuochi sull'asse x

L'equazione canonica standard è data da:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (9)$$

Le proprietà geometriche salienti sono:

- **Vertici reali:** $A_{1,2}(\pm a, 0)$
- **Relazione fondamentale:** $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
- **Fuochi:** $F_{1,2}(\pm c, 0)$
- **Asintoti:** Rette limite definite dalle equazioni $y = \pm \frac{b}{a}x$

5.2 Iperbole con Fuochi sull'asse y

Quando i fuochi giacciono sull'asse verticale, l'equazione assume la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (10)$$

Le proprietà associate diventano:

- **Vertici reali:** $B_{1,2}(0, \pm b)$
- **Fuochi:** $F_{1,2}(0, \pm c)$ con $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
- **Asintoti:** Rimangono invariati rispetto alle rette $y = \pm \frac{b}{a}x$

5.3 Eccentricità

Nell'iperbole l'eccentricità è sempre superiore all'unità ($e > 1$) ed è definita come:

$$e = \frac{c}{\text{semiasse trasverso}} \quad (11)$$

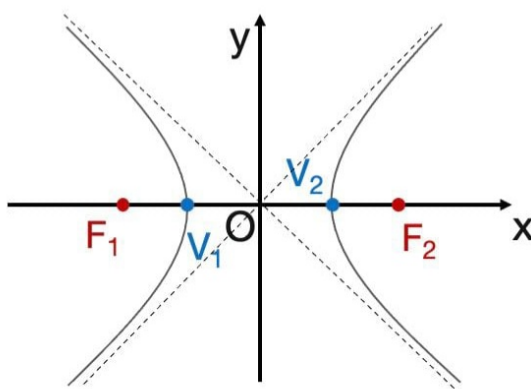


Figura 4: Immagine iperbole

6 Classificazione Algebrica delle Coniche

Per identificare la natura della curva data dall'equazione generale senza effettuare rototraslazioni coordinate, si studia il segno del discriminante algebrico definito come $\Delta_{\text{conica}} = B^2 - 4AC$.

Tabella 1: Classificazione delle coniche non degenerate in base al discriminante.

Condizione sul $\Delta = B^2 - 4AC$	Tipo di Conica Associata
$\Delta < 0$	Ellisse (Circonferenza se $B = 0$ e $A = C$)
$\Delta = 0$	Parabola
$\Delta > 0$	Iperbole