



UNIVERSITÀ
CATTOLICA
del Sacro Cuore

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso F.S.L. Laboratorio di L^AT_EX 2026

Frattali: teoria matematica e rappresentazione grafica mediante L^AT_EX

Autori:

Gaia Piccolo
Oscar Pampaluna
Pietro Introzzi

Docenti:

Prof.ssa Grazia Messineo
Prof. Salvatore Vassallo

Corso:

F.S.L. Laboratorio di L^AT_EX

Anno Accademico 2025/2026

Abstract

Fractal geometry extends classical Euclidean geometry by providing mathematical models for describing complex shapes that frequently occur both in mathematics and in nature. One of its defining features is *self-similarity*, namely the property that parts of an object resemble the whole at different scales. This characteristic makes fractals suitable for modelling a wide range of natural structures, including coastlines, mountain profiles and branching patterns.

This paper is divided into two complementary parts. The first introduces the main concepts of fractal geometry, including self-similarity and fractal dimension, and presents several classical examples: the Cantor set, the Sierpinski triangle, the Koch snowflake, the Sierpinski carpet, and the Mandelbrot and Julia sets. For each fractal, we briefly discuss its historical background, construction process and most relevant mathematical properties.

The second part focuses on the graphical representation of fractals in $\text{\LaTeX}$, using the `pst-fractal` package together with other tools for producing high-quality figures and simple animations. Through a series of examples, we show how $\text{\LaTeX}$ can be used not only for mathematical typesetting but also for creating clear and effective graphical representations of fractal objects.

The aim of this work is to combine a concise introduction to fractal geometry with a practical exploration of some advanced features of $\text{\LaTeX}$, highlighting its versatility in the preparation of scientific documents.

Parole chiave: geometria frattale, dimensione di Hausdorff, insieme di Cantor, triangolo di Sierpinski, fiocco di neve di Koch, insieme di Mandelbrot, insiemi di Julia, sistemi di funzioni iterate, L-system, `pst-fractal`, `TikZ`, $\text{\LaTeX}$.

Indice

I	Teoria matematica	5
1	Introduzione ai frattali	5
1.1	Etimologia e consolidamento del concetto	5
1.2	Sviluppo storico: una cronologia essenziale	5
2	Autosimilarità e sistemi di funzioni iterate	6
3	Dimensione frattale e dimensione di Hausdorff	7
3.1	Dimensione di Hausdorff	7
3.2	Dimensione di similitudine	7
3.3	Rapporto con la geometria euclidea	8
3.4	Applicazioni moderne	8
4	Frattali classici: costruzione e proprietà	9
4.1	L'insieme di Cantor	9
4.1.1	Contesto storico	9
4.1.2	Costruzione	9
4.1.3	Proprietà	9
4.2	Il triangolo di Sierpiski	10
4.2.1	Contesto storico	10
4.2.2	Costruzione	10
4.2.3	Proprietà	10
4.3	Il fiocco di neve di Koch	11
4.3.1	Contesto storico	11
4.3.2	Costruzione	12
4.3.3	Proprietà	12
4.4	Il tappeto di Sierpiski	12
4.4.1	Contesto storico	12
4.4.2	Costruzione	13
4.4.3	Proprietà	13
4.5	L'insieme di Mandelbrot	14
4.5.1	Contesto storico	14
4.5.2	Costruzione	15
4.5.3	Proprietà	15
4.6	Gli insiemi di Julia	15
4.6.1	Contesto storico	15
4.6.2	Costruzione	16
4.6.3	Proprietà	16
4.7	Confronto tra i principali frattali	17
II	Generazione grafica mediante $\text{\LaTeX}$	18
5	Introduzione alla grafica frattale in $\text{\LaTeX}$	18

6	Il pacchetto <code>pst-fractal</code>	18
6.1	L'Insieme di Cantor con <code>pst-fractal</code>	18
6.2	Il triangolo di Sierpinski con <code>pst-fractal</code>	19
6.3	Il fiocco di Koch	20
7	Nota finale	21

Parte I

Teoria matematica

1 Introduzione ai frattali

La geometria euclidea, codificata nei *Elementi* di Euclide e rimasta pressoché invariata per due millenni, si fonda su un'assunzione implicita ma pervasiva: le figure geometriche rilevanti (rette, triangoli, sfere, poliedri) sono *lisce*, nel senso che ammettono piani tangenti (o tangenti) e possono essere descritte localmente tramite polinomi. Questa impostazione si rivela adeguata per buona parte della fisica e dell'ingegneria classiche, ma risulta profondamente inadatta a descrivere la complessità del mondo naturale. Come osservò Mandelbrot nel 1982, «le nuvole non sono sfere, le montagne non sono coni, le coste non sono cerchi, e la corteccia degli alberi non è liscia».

L'idea che esistano oggetti matematici dotati di una struttura complicata a ogni scala di ingrandimento non è, tuttavia, nata con Mandelbrot. Le sue radici affondano nella seconda metà dell'Ottocento, in un periodo di profonda revisione critica dei fondamenti dell'analisi. Cantor (1883), Weierstrass (1872) e Peano (1890) costruirono, ciascuno con finalità diverse, esempi di insiemi e funzioni che contraddicevano l'intuizione geometrica dominante: un insieme perfetto e privo di punti interni, una funzione continua ma non differenziabile in nessun punto, una curva piana che riempie un quadrato. Questi «mostri matematici», come li definiva con disappunto Poincaré, furono inizialmente considerati curiosità patologiche, prive di interesse fisico.

1.1 Etimologia e consolidamento del concetto

Il termine *frattale* fu coniato da Benoit B. Mandelbrot nel 1975, a partire dall'aggettivo latino *fractus* (spezzato, irregolare), lo stesso da cui derivano in italiano *fratto* e *frattura*. La scelta lessicale riflette l'intuizione centrale: questi oggetti sono *frammentati* a tutte le scale, e la loro dimensione non è intera nel senso usuale del termine.

Mandelbrot unificò sotto un'unica prospettiva costruzioni sparse nella letteratura matematica del Novecento: i lavori di Hausdorff (1919) sulla dimensione frazionaria, quelli di Julia e Fatou (1917–1919) sulle iterazioni di funzioni razionali nel piano complesso, e la teoria degli insiemi di Cantor proponendola come strumento di *modellazione* della natura piuttosto che semplice esercizio astratto. La pubblicazione di *The Fractal Geometry of Nature* segnò il momento in cui la geometria frattale divenne un campo riconosciuto, con applicazioni che spaziano dalla finanza alla biologia, dalla meteorologia alle telecomunicazioni.

1.2 Sviluppo storico: una cronologia essenziale

È utile ripercorrere brevemente le tappe principali che hanno portato alla teoria moderna, poiché ciascuna costruisce su quelle precedenti in modo non banale.

- 1872** Karl Weierstrass costruisce la prima funzione continua e ovunque non differenziabile, definita dalla serie qui riportata:

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \quad 0 < a < 1, \quad b \in \mathbb{N} \text{ dispari}, \quad ab > 1 + \frac{3}{2}\pi.$$

La sua struttura irregolare su ogni sottointervallo anticipò l'idea di autosimilarità.

- 1883** Georg Cantor definisce l'insieme che porta il suo nome, mostrando l'esistenza di insiemi non numerabili di misura di Lebesgue nulla.

- 1890** Giuseppe Peano costruisce una curva continua che ricopre l'intero quadrato unitario, demolendo l'identificazione intuitiva tra *ícurvaž* e *íoggetto* unidimensionalež.

- 1904** Helge von Koch presenta la curva a fiocco di neve, primo esempio di curva continua e di lunghezza infinita costruita per iterazione geometrica.

- 1915–1916** Wacaw Sierpiski introduce il triangolo e il tappeto che portano il suo nome.

- 1919** Felix Hausdorff generalizza il concetto di dimensione agli insiemi non interi, ponendo le basi per una teoria metrica rigorosa.

- 1917–1919** Gaston Julia e Pierre Fatou studiano in modo sistematico le proprietà dinamiche delle iterazioni $z \mapsto z^2 + c$ nel piano complesso.

- 1975–1982** Benoit Mandelbrot propone la geometria frattale come disciplina unitaria, introduce la celebre rappresentazione dell'insieme di Mandelbrot e ne mostra le connessioni con gli insiemi di Julia.

2 Autosimilarità e sistemi di funzioni iterate

La caratteristica che accomuna la maggior parte dei frattali è l'*autosimilarità*, ossia la proprietà per cui una figura è composta da parti che ricordano, in tutto o in parte, la forma dell'intero oggetto. In altre parole, osservando il frattale a scale sempre maggiori, è possibile ritrovare strutture simili a quella iniziale.

Esistono due forme principali di autosimilarità. Nel caso dell'**autosimilarità esatta**, ogni porzione della figura è una copia perfetta dell'intero, semplicemente ridotta di scala. È il caso dell'insieme di Cantor, del triangolo di Sierpiski e del fiocco di neve di Koch. In natura, invece, si osserva più frequentemente un'**autosimilarità approssimata**: gli oggetti non sono copie identiche di se stessi, ma presentano una struttura simile che si ripete con piccole variazioni. Esempi tipici sono le felci, le coste marine, i rami degli alberi o il sistema vascolare umano.

Dal punto di vista matematico, molti frattali vengono costruiti mediante un procedimento iterativo: si parte da una figura iniziale e si applica ripetutamente una stessa regola di trasformazione. Ogni iterazione genera una figura più complessa della precedente, mantenendo però la medesima struttura generale.

Per descrivere formalmente questo processo sono stati introdotti gli *Iterated Function Systems* (IFS), sviluppati da John Hutchinson nel 1981 e successivamente approfonditi da Michael Barnsley. Un IFS consiste in un insieme di semplici trasformazioni geometriche, come riduzioni di scala, rotazioni e traslazioni, applicate ripetutamente a una figura. Sebbene la teoria completa richieda strumenti matematici avanzati, l'idea di fondo è intuitiva: ripetendo sempre la stessa regola si ottengono strutture di sorprendente complessità.

L'autosimilarità rappresenta quindi il principio fondamentale della geometria frattale. Essa permette di descrivere forme estremamente articolate attraverso regole molto semplici, mostrando come dalla ripetizione di pochi passaggi possano emergere figure di straordinaria ricchezza geometrica.

3 Dimensione frattale e dimensione di Hausdorff

Uno degli aspetti più sorprendenti dei frattali riguarda il concetto stesso di *dimensione*. Nella geometria euclidea siamo abituati a classificare gli oggetti in base a un numero intero: una retta ha dimensione 1, un piano dimensione 2, mentre un solido possiede dimensione 3.

I frattali, tuttavia, sfuggono a questa classificazione. Essi sono spesso troppo complessi per essere considerati semplici linee, ma allo stesso tempo non riempiono completamente una superficie. Per questo motivo è stato necessario introdurre una nozione più generale di dimensione, capace di descrivere quantitativamente la loro complessità.

3.1 Dimensione di Hausdorff

La **dimensione di Hausdorff**, introdotta dal matematico Felix Hausdorff nel 1918, costituisce uno degli strumenti fondamentali della geometria frattale. Essa permette di assegnare una dimensione anche a oggetti estremamente irregolari, assumendo, in molti casi, valori non interi.

Per gli oggetti della geometria classica, la dimensione di Hausdorff coincide con quella abituale: un segmento ha dimensione 1, un quadrato dimensione 2 e un cubo dimensione 3. Nei frattali, invece, tale valore può risultare frazionario, indicando che la figura possiede una complessità intermedia tra due dimensioni euclidee consecutive.

Nel seguito dell'elaborato utilizzeremo direttamente i valori della dimensione frattale dei principali esempi studiati, senza entrare nella dimostrazione matematica della definizione generale.

3.2 Dimensione di similitudine

Per molti frattali autosimili esiste un metodo semplice per calcolarne la dimensione.

Se una figura è composta da N copie di se stessa, ciascuna ridotta di un fattore r , allora la dimensione frattale è data dalla relazione

$$\dim = \frac{\log N}{\log(1/r)}.$$

Questa formula, nota come **dimensione di similitudine**, permette di ottenere facilmente la dimensione dei principali frattali classici.

Ad esempio, nell'insieme di Cantor ogni iterazione produce due copie della figura originale, ciascuna ridotta di un fattore $\frac{1}{3}$. Sostituendo questi valori nella formula si ottiene

$$\dim = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0.631.$$

Il risultato mostra che l'insieme di Cantor è più complesso di un insieme di punti isolati, ma non raggiunge la dimensione di una linea.

3.3 Rapporto con la geometria euclidea

La Tabella 1 confronta le dimensioni dei principali frattali con quelle degli oggetti della geometria euclidea.

Si osserva che la dimensione frattale assume valori compresi tra due dimensioni intere. Questo riflette il fatto che tali figure presentano un livello di complessità superiore rispetto alle forme geometriche tradizionali, pur essendo generate da regole estremamente semplici.

Tabella 1: Dimensione frattale dei principali frattali studiati.

Figura	Copie	Fattore di scala	Dimensione
Segmento	—	—	1
Quadrato	—	—	2
Cubo	—	—	3
Insieme di Cantor	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{\log 2}{\log 3} \approx 0.631$
Triangolo di Sierpinski	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.585$
Fiocco di neve di Koch	4	$\frac{1}{3}$	$\frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.261$
Tappeto di Sierpinski	8	$\frac{1}{3}$	$\frac{\log 8}{\log 3} \approx 1.893$

La presenza di dimensioni non intere costituisce uno degli aspetti più affascinanti della geometria frattale e rappresenta una delle principali differenze rispetto alla geometria classica.

3.4 Applicazioni moderne

Sebbene i frattali siano nati come oggetti di studio puramente matematico, oggi trovano applicazione in numerosi ambiti scientifici e tecnologici.

In natura essi permettono di descrivere con buona approssimazione forme particolarmente irregolari, come i profili delle coste, le catene montuose, i fulmini, le nuvole, le felci e la ramificazione degli alberi.

Nel campo della medicina vengono utilizzati per modellizzare strutture biologiche quali il sistema vascolare e l'albero bronchiale, caratterizzati da una ramificazione ripetitiva su scale differenti.

In informatica e nella computer grafica i frattali consentono di generare paesaggi, montagne, pianeti e vegetazione realistici mediante algoritmi relativamente semplici, riducendo la quantità di dati da memorizzare.

Infine, in ingegneria delle telecomunicazioni, particolari antenne frattali permettono di operare efficacemente su più frequenze contemporaneamente, mentre in economia Benoît Mandelbrot osservò che l'andamento dei mercati finanziari presenta talvolta caratteristiche statistiche simili a quelle riscontrabili nelle strutture frattali.

Questi esempi mostrano come la geometria frattale rappresenti oggi uno strumento importante non solo per la matematica teorica, ma anche per numerose applicazioni concrete della ricerca scientifica.

4 Frattali classici: costruzione e proprietà

Nelle sezioni che seguono analizziamo sei costruzioni frattali paradigmatiche. Per ognuna vengono discusse la genesi storica, la procedura iterativa che la definisce, le principali proprietà metriche e topologiche, e alcune curiosità che motivano lo studio anche al di là della pura astrazione matematica.

4.1 L'insieme di Cantor

4.1.1 Contesto storico

L'insieme di Cantor fu introdotto dal matematico tedesco Georg Cantor nel 1883 durante i suoi studi sulla teoria degli insiemi. Il suo obiettivo non era quello di costruire un frattale, termine che sarebbe stato coniato soltanto un secolo dopo, ma comprendere meglio la natura degli insiemi infiniti e le loro proprietà.

La costruzione suscitò inizialmente molte perplessità: alcuni matematici dell'epoca la consideravano un semplice esercizio teorico, privo di applicazioni concrete. Col passare degli anni, tuttavia, l'insieme di Cantor si è rivelato uno degli esempi più importanti della matematica moderna e viene oggi considerato il punto di partenza della geometria frattale.

4.1.2 Costruzione

L'insieme di Cantor si ottiene partendo dal segmento chiuso $[0, 1]$. Nel primo passaggio si elimina il terzo centrale, cioè l'intervallo

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

lasciando solamente due segmenti di lunghezza $\frac{1}{3}$.

L'operazione viene quindi ripetuta su ciascuno dei segmenti rimasti: da ognuno si elimina nuovamente il terzo centrale. Dopo ogni iterazione il numero dei segmenti raddoppia, mentre la loro lunghezza diventa sempre più piccola.

Il procedimento continua idealmente all'infinito. L'insieme di Cantor è costituito da tutti i punti che non vengono mai eliminati durante questo processo.

4.1.3 Proprietà

L'insieme di Cantor possiede alcune proprietà sorprendenti.

- **Autosimilarità.** Ogni parte dell'insieme riproduce la struttura dell'intera figura su scala ridotta.

- **Dimensione frattale.** La sua dimensione vale

$$\frac{\log 2}{\log 3} \approx 0.631,$$

un valore compreso tra 0 e 1, indice di una complessità intermedia tra un insieme di punti e un segmento.

- **Lunghezza nulla.** Sebbene rimangano infiniti punti, la lunghezza complessiva dei segmenti tende a zero con l'aumentare delle iterazioni.
- **Importanza matematica.** L'insieme di Cantor rappresenta uno dei primi esempi di figura costruita mediante un procedimento iterativo infinito ed è ancora oggi ampiamente studiato in analisi, topologia e teoria degli insiemi.



Figura 1: Prime iterazioni della costruzione dell'insieme di Cantor. Ad ogni passo viene eliminato il terzo centrale di ciascun segmento rimanente.

4.2 Il triangolo di Sierpinski

4.2.1 Contesto storico

Il triangolo di Sierpinski prende il nome dal matematico polacco Wacaw Sierpinski, che lo descrisse nel 1915 nell'ambito dei suoi studi di topologia.

In origine la figura venne introdotta come esempio matematico con particolari proprietà geometriche. Solo molti decenni più tardi, grazie ai lavori di Benoît Mandelbrot, essa venne riconosciuta come uno dei più celebri esempi di frattale, diventando una delle immagini simbolo della geometria frattale.

4.2.2 Costruzione

La costruzione inizia con un triangolo equilatero pieno.

Si individuano i punti medi dei tre lati e li si unisce, ottenendo quattro triangoli equilateri congruenti. Il triangolo centrale viene eliminato, lasciando soltanto i tre triangoli agli angoli.

Successivamente si ripete la stessa operazione su ciascuno dei tre triangoli rimasti. A ogni iterazione aumenta il numero delle figure presenti, mentre la loro dimensione diminuisce progressivamente.

Ripetendo indefinitamente il procedimento si ottiene il triangolo di Sierpinski.

4.2.3 Proprietà

Il triangolo di Sierpinski è uno degli esempi più semplici ed eleganti di autosimilarità.

- **Autosimilarità.** La figura è composta da tre copie ridotte di se stessa, ciascuna con lato pari alla metà del triangolo precedente.
- **Dimensione frattale.** Applicando la formula della dimensione di similitudine si ottiene

$$\frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.585,$$

valore compreso tra una linea e una superficie.

- **Area.** A ogni iterazione viene eliminata una parte della superficie; nel limite ideale l'area tende a zero, pur mantenendo una struttura infinitamente articolata.
- **Applicazioni.** Il triangolo di Sierpinski compare in numerosi ambiti della matematica e dell'informatica. È inoltre utilizzato nello studio delle antenne frattali e nella computer grafica per mostrare gli effetti delle costruzioni iterative.

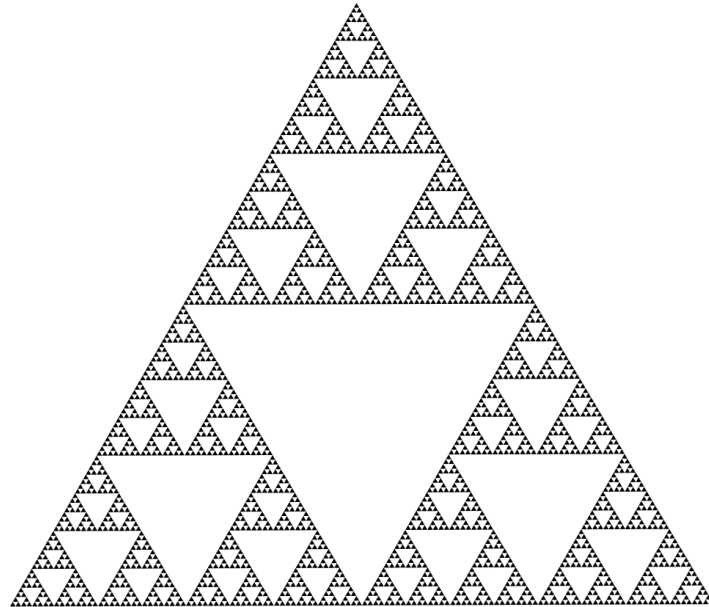


Figura 2: Triangolo di Sierpinski all'iterazione $n = 7$. Le regioni bianche rappresentano le porzioni eliminate durante il procedimento iterativo.

Un'interessante curiosità riguarda il **triangolo di Pascal**, noto anche come ***triangolo di Tartaglia***. Colorando solamente i coefficienti binomiali dispari si ottiene una figura che, aumentando il numero delle righe considerate, assume una forma sempre più simile al triangolo di Sierpinski. Questo collegamento mostra come strutture frattali possano emergere anche in contesti apparentemente molto diversi dalla geometria.

4.3 Il fiocco di neve di Koch

4.3.1 Contesto storico

Il fiocco di neve di Koch fu introdotto nel 1904 dal matematico svedese Helge von Koch nell'ambito dei suoi studi sulle curve continue. L'obiettivo era costruire un esempio di curva che, pur essendo continua, non fosse derivabile in alcun punto.

All'epoca questa figura apparve come una semplice curiosità matematica; oggi è invece considerata uno dei più celebri esempi di frattale. La sua costruzione mostra come una regola estremamente semplice possa generare una figura dalla complessità sorprendente, rendendola uno dei simboli della geometria frattale.

4.3.2 Costruzione

La costruzione del fiocco di neve di Koch inizia con un triangolo equilatero.

Ciascun lato viene suddiviso in tre segmenti uguali; il segmento centrale viene sostituito con due nuovi segmenti che formano un piccolo triangolo equilatero rivolto verso l'esterno. In questo modo ogni lato iniziale viene sostituito da quattro segmenti di lunghezza pari a un terzo di quella originaria.

Lo stesso procedimento viene quindi ripetuto su tutti i nuovi segmenti ottenuti. A ogni iterazione il numero dei lati aumenta rapidamente, mentre la lunghezza di ciascun segmento diminuisce.

Ripetendo indefinitamente la costruzione si ottiene il fiocco di neve di Koch.

4.3.3 Proprietà

Il fiocco di neve di Koch possiede alcune proprietà che lo rendono particolarmente interessante dal punto di vista matematico.

- **Autosimilarità.** Ogni parte del contorno riproduce la stessa struttura dell'intera figura su scala ridotta.
- **Dimensione frattale.** Poiché ogni segmento viene sostituito da quattro segmenti lunghi un terzo dell'originale, la dimensione frattale vale

$$\frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.261,$$

valore compreso tra una linea e una superficie.

- **Perimetro infinito.** A ogni iterazione il perimetro viene moltiplicato per $\frac{4}{3}$. Di conseguenza esso cresce senza limite, pur rimanendo contenuto all'interno di una regione finita del piano.
- **Area finita.** Sebbene il contorno diventi sempre più lungo, l'area racchiusa dal fiocco converge a un valore finito. Questo risultato rappresenta uno degli aspetti più sorprendenti della figura e mostra come lunghezza e area siano concetti matematicamente indipendenti.

Il fiocco di neve di Koch costituisce quindi uno dei primi esempi di figura con *perimetro infinito* e *area finita*, proprietà che lo ha reso celebre nella storia della matematica.

4.4 Il tappeto di Sierpinski

4.4.1 Contesto storico

Il tappeto di Sierpinski fu descritto da Wacław Sierpinski nel 1916, circa un anno dopo il celebre triangolo che porta il suo nome. Anche questa figura nacque nell'ambito degli studi di topologia, ma in seguito è divenuta uno dei frattali più noti e studiati.

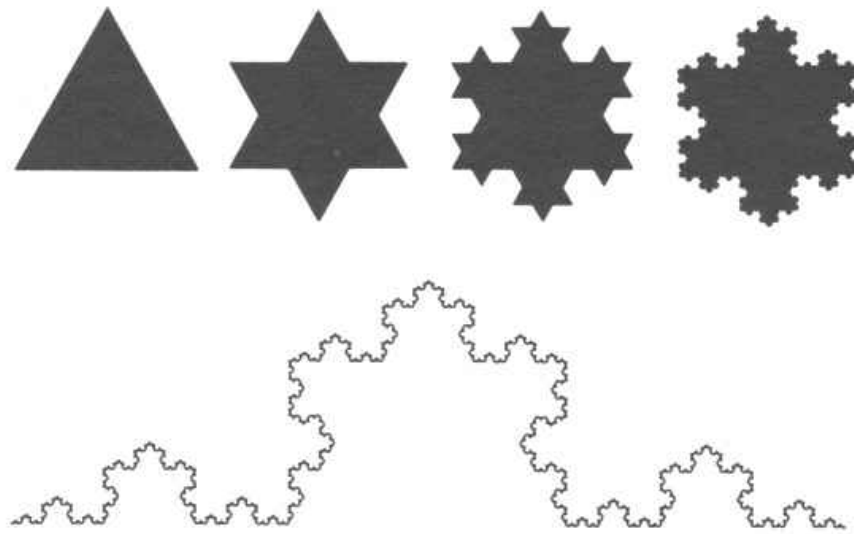


Figura 3: Fiocco di neve di Koch: nell'immagine vengono mostrate le prime quattro iterazioni e un dettaglio, detto anche *merletto di Koch*.

Dal punto di vista geometrico può essere considerato l'analogo bidimensionale dell'insieme di Cantor: invece di eliminare intervalli lungo un segmento, si rimuovono progressivamente porzioni quadrate da una superficie.

4.4.2 Costruzione

La costruzione parte da un quadrato pieno.

Il quadrato viene suddiviso in una griglia 3×3 , ottenendo nove quadrati congruenti. Il quadrato centrale viene eliminato, mentre gli altri otto vengono conservati.

Successivamente la stessa operazione viene ripetuta su ciascuno degli otto quadrati rimasti. A ogni iterazione il numero dei "vuoti" aumenta e la figura assume una struttura sempre più articolata.

Idealmente il procedimento continua all'infinito, producendo il tappeto di Sierpinski.

4.4.3 Proprietà

Anche il tappeto di Sierpinski presenta caratteristiche tipiche della geometria frattale.

- **Autosimilarità.** La figura è composta da otto copie ridotte di se stessa, ciascuna con lato pari a un terzo del quadrato precedente.
- **Dimensione frattale.** Applicando la formula della dimensione di similitudine si ottiene

$$\frac{\log 8}{\log 3} \approx 1.893,$$

valore prossimo a 2, ma ancora inferiore a quello di una superficie piena.

- **Area.** A ogni iterazione viene eliminata una parte della superficie; nel limite ideale l'area tende progressivamente a zero, mentre la figura mantiene una struttura infinitamente complessa.
- **Complessità geometrica.** Pur essendo ottenuto mediante una semplice regola iterativa, il tappeto presenta un numero sempre crescente di cavità distribuite a tutte le scale di osservazione, costituendo uno dei migliori esempi di autosimilarità nel piano.

Grazie alla sua struttura regolare, il tappeto di Sierpinski viene spesso utilizzato come esempio introduttivo nello studio della geometria frattale e trova applicazioni nella computer grafica e nella progettazione di particolari antenne a larga banda.

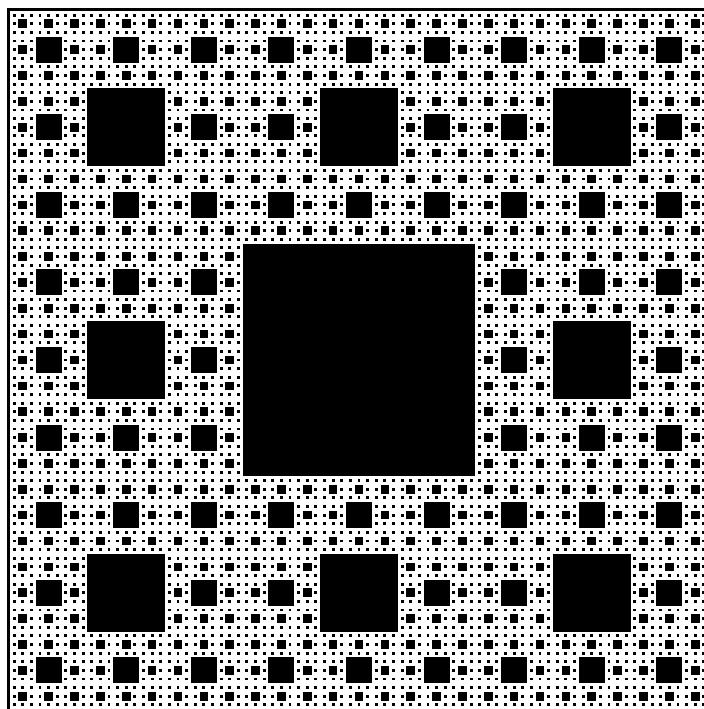


Figura 4: Tappeto di Sierpinski ottenuto mediante successive eliminazioni del quadrato centrale, illustrato all'iterazione $n = 5$.

4.5 L'insieme di Mandelbrot

4.5.1 Contesto storico

L'insieme di Mandelbrot prende il nome dal matematico franco-polacco Benoît Mandelbrot, che lo studiò approfonditamente alla fine degli anni Settanta durante la sua attività presso i laboratori IBM.

Sebbene la relazione matematica da cui deriva fosse già nota agli inizi del Novecento grazie ai lavori dei matematici Pierre Fatou e Gaston Julia, fu proprio Mandelbrot a intuire che l'utilizzo dei calcolatori avrebbe permesso di visualizzarne la straordinaria complessità. Le immagini ottenute suscitavano un enorme interesse sia nella comunità scientifica sia nel grande pubblico, contribuendo alla diffusione della geometria frattale.

4.5.2 Costruzione

A differenza dei frattali presentati in precedenza, l'insieme di Mandelbrot non nasce da una costruzione geometrica, ma da un procedimento iterativo applicato ai numeri complessi.

Per ogni punto del piano complesso si considera la successione

$$z_{n+1} = z_n^2 + c,$$

dove inizialmente $z_0 = 0$ e il numero complesso c rappresenta il punto esaminato.

Se, ripetendo l'iterazione, i valori della successione rimangono limitati, il punto appartiene all'insieme di Mandelbrot; se invece crescono senza limite, il punto ne è escluso.

Attraverso questo semplice procedimento è possibile stabilire, punto per punto, quali regioni del piano appartengano all'insieme.

4.5.3 Proprietà

L'insieme di Mandelbrot è probabilmente il frattale più celebre della matematica moderna.

- **Autosimilarità.** Ingrandendo il bordo dell'insieme emergono continuamente nuove strutture che ricordano la forma principale, pur non essendo copie perfettamente identiche.
- **Complessità infinita.** Ogni livello di ingrandimento rivela dettagli sempre nuovi, senza che sia possibile individuare una scala alla quale la figura diventi "semplice".
- **Generazione mediante calcolo.** La costruzione dell'insieme richiede esclusivamente operazioni iterative eseguite dal calcolatore, rendendolo uno degli esempi più significativi dell'incontro tra matematica e informatica.
- **Importanza scientifica.** L'insieme di Mandelbrot è divenuto il simbolo stesso della geometria frattale ed è oggi utilizzato nello studio dei sistemi dinamici, nella computer grafica e nella modellizzazione di numerosi fenomeni naturali.

La straordinaria ricchezza delle sue forme dimostra come una semplice legge matematica possa generare strutture di complessità apparentemente inesauribile.

4.6 Gli insiemi di Julia

4.6.1 Contesto storico

Gli insiemi di Julia furono studiati dal matematico francese Gaston Julia tra il 1917 e il 1918, durante le sue ricerche sui sistemi dinamici nel piano complesso.

Per molti decenni questi risultati rimasero quasi esclusivamente teorici, poiché la loro rappresentazione grafica richiedeva un numero enorme di calcoli. Soltanto con l'avvento dei computer fu possibile visualizzare tali figure, mettendone in evidenza la straordinaria varietà di forme.

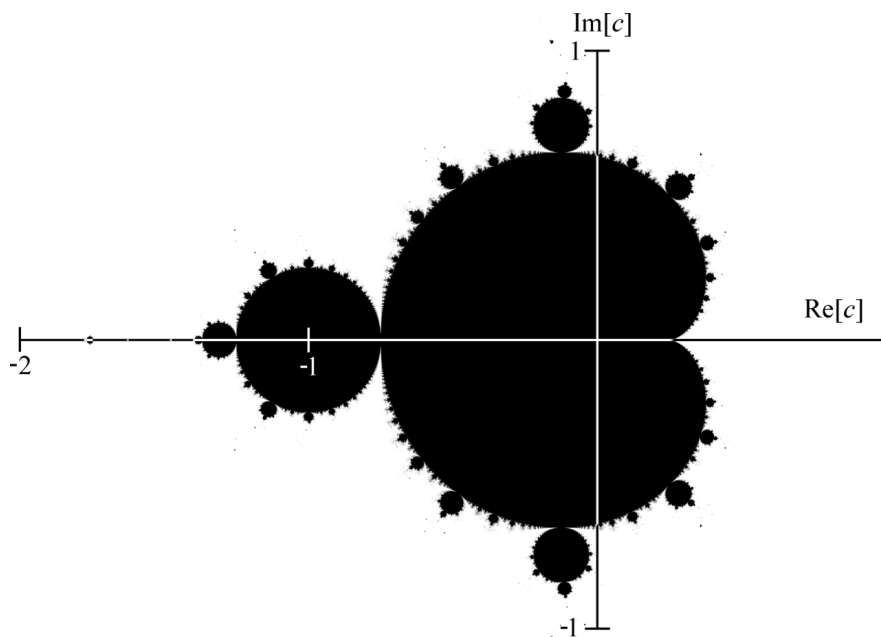


Figura 5: Rappresentazione dell'insieme di Mandelbrot. Lungo il bordo si osservano dettagli sempre nuovi a qualsiasi livello di ingrandimento.

4.6.2 Costruzione

Gli insiemi di Julia sono ottenuti utilizzando la stessa relazione iterativa impiegata per l'insieme di Mandelbrot,

$$z_{n+1} = z_n^2 + c,$$

ma con una differenza fondamentale: il parametro c viene mantenuto fisso, mentre varia il punto iniziale della successione.

Ogni scelta del parametro genera un diverso insieme di Julia. Alcuni assumono forme compatte e continue, mentre altri risultano costituiti da un gran numero di componenti separate.

4.6.3 Proprietà

Gli insiemi di Julia costituiscono una vasta famiglia di frattali, ciascuno caratterizzato da una geometria differente.

- **Grande varietà di forme.** Modificando anche leggermente il valore del parametro c si ottengono figure profondamente diverse tra loro.
- **Autosimilarità.** Come molti frattali, presentano dettagli che si ripetono a scale differenti, rendendo ogni ingrandimento ricco di nuove strutture.
- **Legame con Mandelbrot.** Esiste una stretta relazione tra gli insiemi di Julia e l'insieme di Mandelbrot: quest'ultimo permette infatti di prevedere alcune proprietà geometriche degli insiemi di Julia associati ai diversi valori del parametro.

- **Valore estetico.** Grazie alle loro forme estremamente elaborate e ai colori utilizzati nelle rappresentazioni digitali, gli insiemi di Julia sono tra le immagini più spettacolari prodotte dalla geometria frattale.

Essi rappresentano uno degli esempi più efficaci di come semplici regole iterative possano dare origine a strutture geometriche di sorprendente complessità.

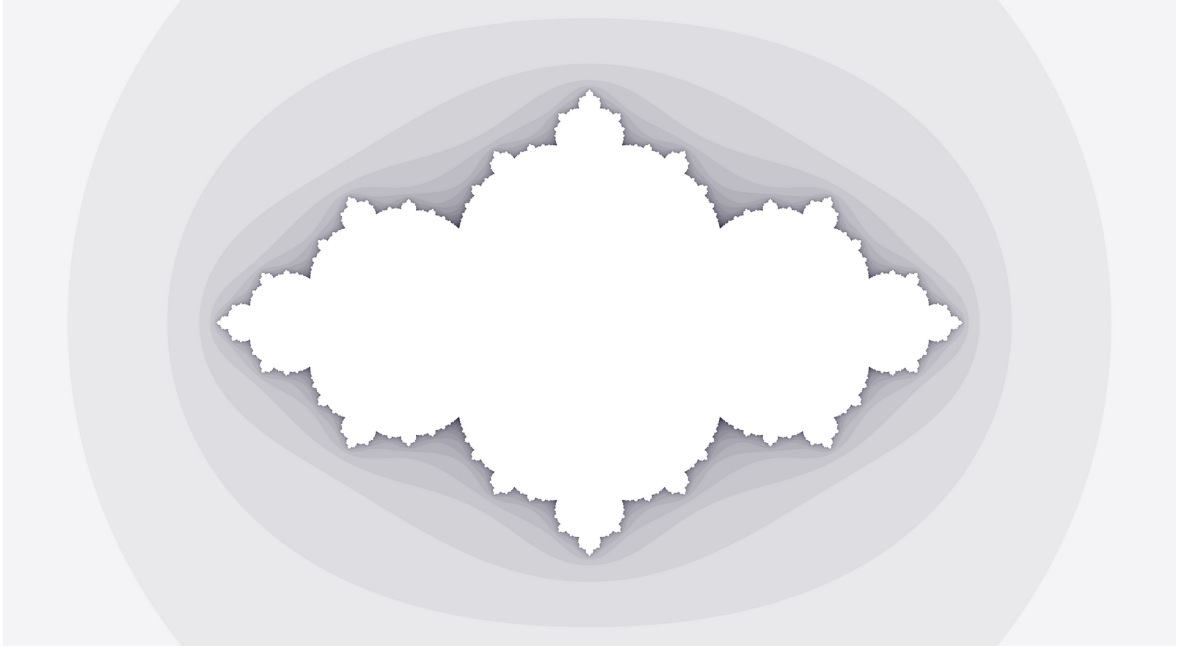


Figura 6: Esempio di insieme di Julia ottenuto fissando un particolare valore del parametro c . In questo caso $f(c) = 1 - \varphi$

4.7 Confronto tra i principali frattali

La Tabella 2 riassume le principali caratteristiche dei frattali presentati in questa sezione.

Tabella 2: Confronto tra i principali frattali analizzati.

Frattale	Costruzione	Dim.	Proprietà distintiva
Insieme di Cantor	Terzo centrale	0.631	Lunghezza nulla
Triangolo di Sierpinski	Triangolo centrale	1.585	Area $\rightarrow 0$
Fiocco di Koch	Segmenti	1.261	$P \rightarrow \infty$
Tappeto di Sierpinski	Quadrato centrale	1.893	Infiniti vuoti
Insieme di Mandelbrot	Iterazione	–	Zoom infinito
Insiemi di Julia	Iterazione	–	Dipende da c

Dall'analisi dei principali esempi emerge un elemento comune: tutti i frattali sono ottenuti mediante l'applicazione ripetuta di regole matematiche molto semplici. Nonostante ciò, il risultato finale presenta una complessità geometrica sorprendente, spesso accompagnata da proprietà controintuitive.

Questa apparente contraddizione costituisce uno degli aspetti più affascinanti della geometria frattale e spiega il crescente interesse che essa continua a suscitare sia nella ricerca matematica sia nelle sue numerose applicazioni scientifiche e tecnologiche.

Parte II

Generazione grafica mediante L^AT_EX

5 Introduzione alla grafica frattale in L^AT_EX

Che L^AT_EX possa produrre figure matematiche di qualità tipografica elevata è noto a chiunque abbia usato il pacchetto TikZ. Che possa generare frattali in modo diretto, calcolando le iterazioni all'interno della compilazione stessa, è forse meno ovvio ma è effettivamente possibile, grazie a un insieme di pacchetti specializzati.

In questa parte mostreremo l'approccio che si basa su `pst-fractal`, un pacchetto PSTricks che fornisce comandi di alto livello per i frattali più comuni. Mentre non tratteremo per questioni di spazio e poichè molto complesso il secondo metodo che utilizza TikZ con la libreria `lindenmayersystems` per descrivere frattali tramite sistemi L, ovvero grammatiche di riscrittura su stringhe di simboli interpretati come istruzioni geometriche. Completa la panoramica l'uso del pacchetto `animate` per produrre sequenze animate delle prime iterazioni, consultabili direttamente in un visualizzatore PDF.

6 Il pacchetto `pst-fractal`

Il pacchetto `pst-fractal`, di Herbert VoSS, fa parte dell'ecosistema PSTricks e fornisce un'interfaccia di alto livello per la generazione di alcuni frattali classici direttamente da sorgente L^AT_EX. La sua filosofia è quella di nascondere il dettaglio dell'iterazione all'utente, esponendo invece parametri semanticamente significativi come il numero di iterazioni, il colore di riempimento, e la scala dell'oggetto.

Il pacchetto si carica con:

```
1 \usepackage{pstricks}
2 \usepackage{pst-fractal}
```

Listing 1: Pacchetti necessari per `pst-fractal`.

6.1 L'Insieme di Cantor con `pst-fractal`

Si può facilmente ottenere un insieme di Cantor tramite L^AT_EX utilizzando un comando predefinito:

```
1 \begin{pspicture}(10,-2)
2   % I parametri variano la dimensione del disegno. Il primo
   % si riferisce alla larghezza, il secondo all'altezza.
3 \psCantor
4 \end{pspicture}
```



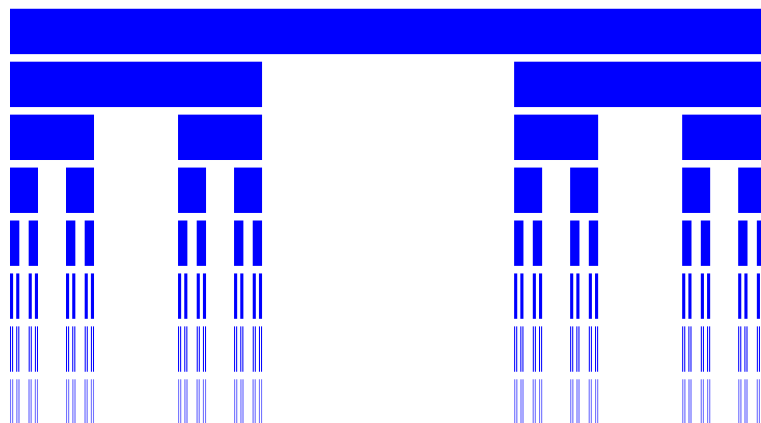
Importante: il comando non viene eseguito correttamente dal Compiler **PdfLaTeX**, che restituisce un errore in corrispondenza di `\end{pspicture}`. Utilizzare invece **XeLaTeX**.

Inoltre è possibile modificare, tramite un argomento opzionale, diversi parametri.

```

1 \begin{pspicture}(11,-5)
2   \psCantor[
3     linewidth=6mm, % spessore delle linee
4     linecolor=blue, % colore delle linee
5     n=8, % numero di iterazioni
6     xWidth=10, % larghezza della prima linea
7     yWidth=7mm] % distanza tra i punti medi delle linee lungo y
8 \end{pspicture}

```



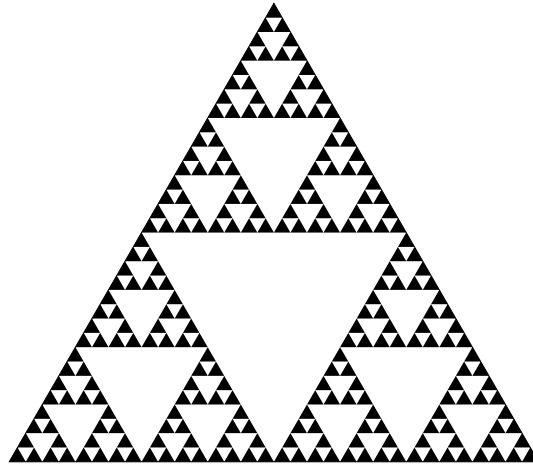
6.2 Il triangolo di Sierpinski con *pst-fractal*

Il comando principale per il triangolo di Sierpinski è `\psSier`. La sintassi minimale è la seguente:

```

1 \begin{pspicture}(10,7)
2   \psSier[
3     linecolor=black, % colore disegno
4     fillcolor=white] % colore riempimento spazi
5   (2,0) % coordinate del vertice in basso a sinistra
6   {7cm} % lunghezza del lato
7   {5} % numero di iterazioni
8 \end{pspicture}

```

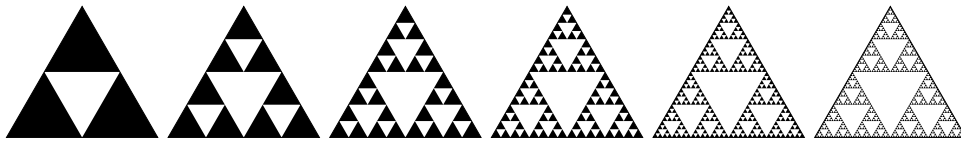


Interessante notare come sia possibile creare una serie di immagini che mostrino l'andamento in base alle varie iterazioni:

```

1 \multido{\iA=1+1}{6}{%
2 \begin{pspicture}(2,1.7)
3 \psSier[linecolor=black,
4 fillcolor=white](1,-0.75){2cm}{\iA}
5 \end{pspicture} }

```



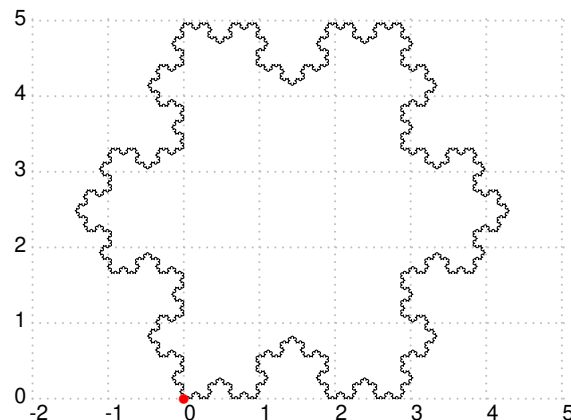
6.3 Il fiocco di Koch

In maniera analoga a quanto visto per gli altri frattali si può generare un **fiocco di Koch**. Come riportato anche dalla guida CTAN sul pacchetto `pst-fractal`, è possibile inserire una griglia di sfondo (`showgrid=true`) e il punto di inizio della costruzione del frattale (`\psdot[linecolor=red,dotstyle=*](0,0)`).

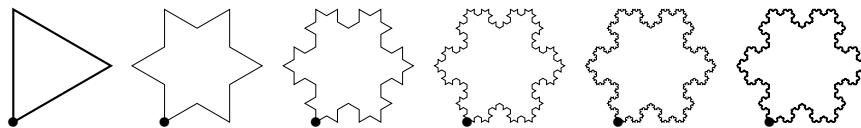
```

1 \begin{pspicture}[showgrid=true](-2.4,-0.4)(5,5)
2 \psKochflake[scale=10]
3 \psdot[linecolor=red,dotstyle=*](0,0)
4 \end{pspicture}

```



E sempre analogamente a quanto visto per il Triangolo di Sierpinski attraverso l'opzione `\multido`:



7 Nota finale

Poichè aggiungendo ulteriori righe di codice il file diventerebbe troppo lungo per essere compilato tramite la versione gratuita di OverLeaf, qui chiudiamo la nostra trattazione.